Коротаев А. В., Малков А. С., Халтурина Д. А. 2007. *Законы истории: Математическое моделирование развития Мир-Системы. Демография, экономика, культура*. М.: КомКнига/URSS. С. 155–181.

Экскурс 3

Математические модели гиперболического роста народонаселения мира. Критический анализ

В этом экскурсе мы дадим анализ ранее предлагавшихся математических моделей гиперболического роста населения Земли и обоснуем причины, побудившие нас приступить к разработке новых макродинамических моделей, предложенных в первой части этой книги.

Данный экскурс, содержащий также и дополнительное обоснование этих моделей, предназначен прежде всего для математически подготовленных читателей (тем не менее, мы рекомендовали бы попробовать прочитать этот экскурс и читателям, математического образования не имеющим).

Математические методы и демография

Несмотря на измеримость данных и, более того, на очевидность формулы, вытекающей из закона сохранения и описывающей демографическую динамику:

$$\frac{dN}{dt} = B - D, \qquad \text{(III.1)}$$

где *N* – число людей, *B* – число рождений и *D* – число смертей в единицу времени, на микроуровне оказывается, что и число рождений, и число смертей зависят от многих других социальных параметров, и в том числе от "человеческого фактора" – принятия решений отдельными людьми, слабо поддающегося формализации.

Кроме того, формула (III.1) не учитывает перемещения людей в пространстве, а, следовательно, она должна быть расширена:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = B - D - \mathrm{div}\mathbf{J},$$

где вектор **J** соответствует миграционному потоку. В этом случае, задача еще больше усложняется, поскольку миграционные процессы еще сильнее подвержены влиянию внешних факторов.

Поэтому описание демографических процессов на микроуровне наталкивается на существенные проблемы, связанные, прежде всего, с неразработанностью формальных социальных законов, увязывающих экономические, политические, социально-психологические и прочие факторы, определяющие поведение малых групп людей.

Таким образом, единственным пока доступным подходом является макроописание, не вдающееся в мелкие детали демографического процесса и описывающее динамику больших людских масс, для которых влияние человеческого фактора заметно ниже.

Биологические процессы рождения и смерти характерны не только для людей, но и для любых животных. Поэтому вполне естественным шагом является попытка описания демографических моделей с применением хорошо зарекомендовавших себя популяционных моделей, использующихся в биологии (см., например: Ризниченко 2002).

Базовой моделью, описывающей динамику популяции животных, является логистическая модель, предложенная Ферхюльстом (Verhulst 1838):

$$\frac{dN}{dt} = r(1 - \frac{N}{K})N \,, \tag{III.2}$$

которое можно также представить в виде

$$\frac{dN}{dt} = (a_1 N) - (a_2 N + bN^2)\,, \tag{III.3}$$

где первая скобка соответствует числу рождений B, а вторая – числу смертей D в формуле (III.1), а r, K, a_1, a_2, b – положительные коэффициенты, связанные соотношениями

$$r = a_1 - a_2 \quad \text{и} \quad b = \frac{r}{K}\,,$$

Логика уравнения (III.3) такова: рождаемость a_1 является постоянной, таким образом, число рождений $B = a_1 N$ пропорционально численности популяции, естественная смертность a_2 также считается постоянной, а квадратичная добавка bN^2 в выражении для полной смертности $D = a_1 N + bN^2$ возникает из-за ограниченности ресурса, не позволяющей популяции бесконечно расти. Коэффициент b называют коэффициентом внутривидовой конкуренции.

В итоге, динамика популяции, описываемой логистическим уравнением, имеет следующий вид. В начале, когда численность животных мала, наблюдается экспоненциальный рост с показателем $r = a_1 - a_2$. Затем, по мере заполнения экологической ниши, рост замедляется и, в конечном счете, численность популяции выходит на постоянный уровень K.

Значение параметра *K*, называемого *емкостью экологической ниши популяции*, принципиально. Эта величина определяет равновесное состояние в динамике популяции при заданных ресурсных ограничениях и определяет пределы ее роста.

Другой известной популяционной моделью является модель Лотки – Вольтера (Lotka 1925; Volterra 1926), известная как "хищник-жертва". Она описывает динамику популяций двух взаимодействующих видов, один из которых является основной пищей для другого, и состоит из двух уравнений вида (III.1):

$$\frac{dx}{dt} = Ax - Bxy$$
$$\frac{dy}{dt} = Cxy - Dy, \qquad \text{(III.4)}$$

где x – численность жертв, y – численность хищников, A, B, C, D – коэффициенты.

Данная модель, аналогично (III.2), предполагает, что число рождений жертв пропорционально их численности. Число смертей хищников также пропорционально их численности. Что касается смертности жертв и рождаемости хищников, то тут имеет место системный эффект. Считается, что жертвы в основном гибнут из-за контакта с хищником, а рождаемость хищников зависит от наличия пищи – жертв. В модели предполагается, что в среднем число контактов жертв и хищников пропорционально численности обоих популяций, что и дает выражение Bxy для количества смертей жертв и Cxy – для числа рождений хищников.

Данная модель демонстрирует циклическую динамику. Рост численности жертв приводит к росту хищников, рост хищников вызывает сокращение жертв, сокращение жертв ведет к сокращению хищников, а при малом количестве хищников жертвы вновь начинают бурно размножаться.

Описанные популяционные модели имеют чрезвычайно широкое применение в биологических исследованиях. Разумно предположить, что и для человека, коль скоро он также имеет биологическую природу, должны выполняться подобные зависимости или их аналоги.

В глубокой древности, когда предки человека мало отличались от животного, по всей видимости, модели (III.2) – (III.4) могли бы быть применены в полной мере. Однако с появлением у человека новой среды обитания – социальной, прямое применение описанных моделей уже не вполне адекватно. В частности, модель (III.2) предполагает заданную внешними условиями емкость экологической ниши (которая в социальных моделях, часто называется *потолком несущей способности земли*), однако опыт развития человечества показывает, что на протяжении всей истории этот потолок постоянно поднимался, следуя собственным законам развития, и, следовательно, он не может считаться постоянным и задаваемым внешними условиями. Человек способен преобразовывать эти условия (см., например: Гринин 2006а).

Что же касается модели (III.4), то в прямом смысле она вообще мало применима, так как человек на ранних этапах эволюции научился эффективно обороняться от хищников, и, следовательно, не может являться "жертвой" в модели, а с другой стороны, он научился в высокой степени не зависеть от колебаний численности жертв, на которые он охотится, следовательно, он, как правило, не может быть и "хищником", поскольку хищники в модели очень чувствительны к изменению числа жертв.[1]

Тем не менее, модель (III.4) может находить новое, нетрадиционное применение в демографических моделях. В частности, она может быть применена для описания колебаний численности населения, обнаруженных практически во всех аграрных обществах. В роли жертвы выступает население, а в роли хищника – социальная нестабильность, войны, голод, эпидемии, вероятность возникновения которых увеличивается по мере того, как растущее население приближается к потолку несущей способности.

Демографические циклы сами по себе являются очень интересным предметом математического исследования. В последнее время эта тема активно разрабатывается (подробнее об этом см. в следующей части *Законов истории* [Коротаев, Комарова, Халтурина 2007]).

Гиперболический рост населения Земли. Открытие Х. фон Ферстера

Модели демографических циклов хорошо согласуются с историческими данными и описывают динамику населения на временных масштабах порядка столетий, однако если рассмотреть тот же демографический процесс, на гораздо большем масштабе – если проследить динамику человечества на протяжении всего времени его существования, то перед нами предстанет совсем иная картина. Численность человечества растет по гиперболическому закону.

Впервые этот феномен был отмечен в 1960 году Х. фон Ферстером, П. Мора и Л. Амиотом (von Foerster, Mora, and Amiot 1960). Они провели статистическую оценку демографических данных и обнаружили, что кривая роста населения Земли лучше всего аппроксимируется кривой

[1] Все-таки нельзя полностью исключать возможной применимости этой модели для некоторых систем специализированных охотников-собирателей, жизнеобеспечивающая экономика которых в очень высокой степени основывалась на эксплуатации какого-то одного вида растений или животных (скажем, оленя карибу применительно к некоторым группам американской Субарктики [см., например: Kehoe 1992: 480–563]).

$$N = \frac{C}{t_0 - t}, \tag{III.5}$$

где C и t_0 – константы, причем t_0 – соответствует 13 ноября 2026 года. Согласно этой формуле в этот день численность человечества должна уйти в бесконечность.

Противоестественность такого вывода, вытекающего из четко прослеживаемой за многие тысячи лет человеческой истории тенденции, привлекла большое внимание к данной работе, и стимулировала появление попыток объяснить такие парадоксальные наблюдения. В самой статье Х. фон Ферстер с соавторами также пытается найти объяснения столь неожиданным эмпирическим наблюдениям. Он начинает теоретические построения, отталкиваясь от уравнений (III.1) и (III.3), вполне объяснимых с точки зрения популяционной динамики, однако не описывающих процесс роста населения Земли. Для того чтобы модель могла описать этот процесс, Х. фон Ферстер обращается к бурно развивающейся в его время теории игр и предлагает рассматривать процесс развития человечества как игру двух игроков – человека и природы. В данном случае все человечество представляет собой одну коалицию, которая ведет игру тем эффективнее (снижение естественных рисков, улучшение условий жизни), чем больше численность населения, формирующего эту коалицию. Моделирование подобной ситуации он предлагает реализовать с помощью введения нелинейности в виде

$$\frac{dN}{dt} = (a_0 N^{\frac{1}{k}}) N,$$

где a_0, k – константы, которые должны быть определены из эксперимента. Собственно анализ экспериментальных данных Х. фон Ферстера определяет значения $a_0 = 5{,}5 \times 10^{-12}$ и $k = 0{,}99$, что дает гиперболическое уравнение для роста населения:

$$N = N_1 \left(\frac{t_0 - t_1}{t_0 - t} \right)^k,$$

которое, считая k равным единице, более кратко записывается как (III.5).

Характерно то, что работа Х. фон Ферстера, П. Мора и Л. Амиота (von Foerster, Mora, and Amiot 1960) вышла в свет в 1960 году, в то время, когда гиперболическая зависимость выражалась наиболее явно. Начиная с шестидесятых годов XX века реальная динамика народонаселения Земли стала все больше отходить от гиперболической кривой и к настоящему времени темпы роста населения резко понизились (см. Диаграмму III.1).

Наблюдается то, что получило название *глобального демографического перехода*. Х. фон Ферстер, П. Мора и Л. Амиот опубликовали статью за два года до резкого перелома 1962–1963 годов, в течение которых наблюдались максимальное за всю историю значение темпов прироста населения – 2,19% в год, сменившееся последующим резким падением. Тем не менее, Х. фон Ферстер, П. Мора и Л. Амиот предвидели снижение темпов роста и фактическое изменение закона роста человечества, действовавшего на протяжении всей его истории. Они явно пишут о необходимости снижения рождаемости, по крайней мере, в два раза по сравнению с уровнем 1960 г. (3,45% = 34,5 родов на 1000 чел.) во избежание серьезных катаклизмов. Курьезно, но уже через три года прогноз начал стремительно сбываться и рост разрыва между смертностью и рождаемостью сменился резким сокращением.

Гиперболический рост населения Земли и модель С. П. Капицы

Несмотря на разрешение парадокса бесконечного роста, научный интерес к глобальной демографии не ослаб, наоборот, вместо одной загадки – "почему в течение всей истории наблюдался гиперболический рост народонаселения?" появилась еще и вторая: "почему сейчас, за микроскопическое по историческим масштабам время происходит нарушение закона, действовавшего тысячи и тысячи лет?"

Наиболее фундаментальными работами в области глобальной демографии, описывающими демографические процессы и дающими ответы на оба поставленных вопроса, по праву считаются работы С. П. Капицы (1992, 1996, 1999).

В отличие от демографических моделей, строящихся на биологических предположениях типа (III.1), (III.2), что рост населения пропорционален самому населению, то есть, по сути, в предположении, что рождаемость и смертность мало меняются со временем:

$$\frac{dN}{dt} = aN \, , \qquad \text{(III.6)}$$

где a – константа, С. П. Капица предлагает использовать квадратичную зависимость для скорости роста:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{N^2}{C} \, , \qquad \text{(III.7)}$$

где C – константа.

Уравнения вида (III.7) хорошо изучены (Курдюмов 1999) и их решения известны как режимы с обострением. Характерная черта таких уравнений состоит в том, что в некоторый конечный момент времени t_0 решение уходит в бесконечность.

Что же касается самого уравнения (III.7), то его решением как раз и будет полученная эмпирически формула (III.5), где t_0 зависит от начальных условий. Таким образом, уравнение (III.7) удовлетворительно описывает эмпирическую зависимость (III.5) и может выступать в роли модели демографического процесса.

Однако если трактовка экспоненциального уравнения (III.6) достаточно прозрачна и вытекает из усреднения биологических процессов, то гиперболический рост (III.7) требует своего объяснения и обоснования.

С. П. Капица видит причину квадратичной зависимости в том, что человечество представляло собой единую систему, внутри которой происходят парные взаимодействия по обмену информацией и скорость роста отдельных частей существенно зависит от общего размера всей системы. Именно информационные взаимодействия, по мнению Капицы, являются основным механизмом, отличающим человека от остальных животных, для которых характерен линейный закон (III.6).

Таким образом, С. П. Капица дает объяснение гиперболическому росту населения Земли. Что касается второй загадки – демографического перехода, то для описания этого явления С. П. Капица модифицирует модель следующим образом.

Поскольку рост человечества, согласно уравнению (III.7), зависит исключительно от размера популяции и не зависит ни от каких внешних условий и ресурсных ограничений, то логика диктует искать причину демографического перехода также внутри человека, поскольку никакие ресурсные ограничения не могли на протяжении тысячелетий остановить процесс роста, да и в нынешнее время переход происходит не из-за ресурсного кризиса, так как среднедушевой доход постоянно растет. Для Капицы особо важным параметром видится характерное время жизни человека $\tau = 42$ года, определяемое "внутренней предельной способностью системы человечества и человека к развитию".

Этот параметр появляется в различных статистических оценках, в частности, С. П. Капица отмечает, что демографический переход происходит за характерное время равное удвоенному τ.

Если подставить в квадратичное уравнение роста (III.7) решение (III.5), то его можно записать в виде

$$\frac{dN}{dt} = \frac{C}{(t_0 - t)^2}\,. \qquad \text{(III.8)}$$

В свою очередь, для того, чтобы описать демографический переход, С. П. Капица вводит в это уравнение параметр τ:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{C}{(t_0 - t)^2 + \tau^2} \,. \tag{III.9}$$

Полученное уравнение уже не дает обострения – ухода решения в бесконечность, напротив, при такой модификации, численность населения стабилизируется на уровне 10–12 миллиардов человек, что согласуется с некоторыми прогнозами демографов. Более того, уравнение (III.9) позволяет получить аналитическую формулу для численности населения:

$$N = \frac{C}{\tau} arcctg\left(\frac{t_1 - t}{\tau}\right), \tag{III.10}$$

где t_1 – параметр, равный 2000 году нашей эры – середине второй фазы глобального демографического перехода.

Работы С. П. Капицы убедительно показали, что рост населения Земли можно описать математически, фактически не вводя никаких дополнительных переменных, то есть, по сути, не привлекая никаких дополнительных факторов. Этот эффект дает основания для провозглашения "демографического императива", признания первостепенной и самодостаточной роли демографии в истории развития человеческого общества.

Тем не менее, ни предлагаемое С. П. Капицей основное уравнение (III.7), ни его модификация (III.9), описывающая эффект демографического перехода, не раскрывают сути действующих законов, оставаясь на феноменологическом уровне констатацией обнаруженной эмпирической закономерности. Изящность демографического императива делает привлекательным подобный подход, но она же и невольно мистифицирует полученные результаты. С математической точки зрения, имеющиеся демографические данные – это реализация некоторого процесса, интегральная кривая, а уравнения (III.7) и (III.5) эквивалентны, поскольку одно является дифференциальной формой записи другого.

Однако, несмотря на математическую эквивалентность обоих выражений, различие в форме записи диктует различие в их интерпретации. Так, если уравнение (III.7), в которое входит единственная переменная N, создает предпосылку для провозглашения демографического императива, то уравнение (III.5) – является отправной точкой для эсхатологических выводов, наиболее явно сформулированных в названии самой первой работы (von Foerster, Mora, and Amiot 1960), обратившей внимание на факт гиперболического роста населения Земли. Название этой работы "Doomsday:

Friday, 13th November, A.D. 2026 (Конец света: пятница, 13 ноября 2026 года от Рождества Христова)", выдвигает совсем иной тезис – развитие человечества связывается отнюдь не с принципиальной ролью демографии, а с фиксированной временнóй точкой, входящей в уравнение (III.5) как t_0. Чтобы подчеркнуть роль временной сингулярности, то же уравнение можно записать в эквивалентной форме:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{C}{(t_0 - t)^2}, \qquad \text{(III.11)}$$

что, по аналогии с выводом из уравнения (III.7), что на рост населения не влияет ничего, кроме численности населения, ведет к выводу, что на рост населения не влияет ничего, кроме загадочной даты 13 ноября 2026 года.

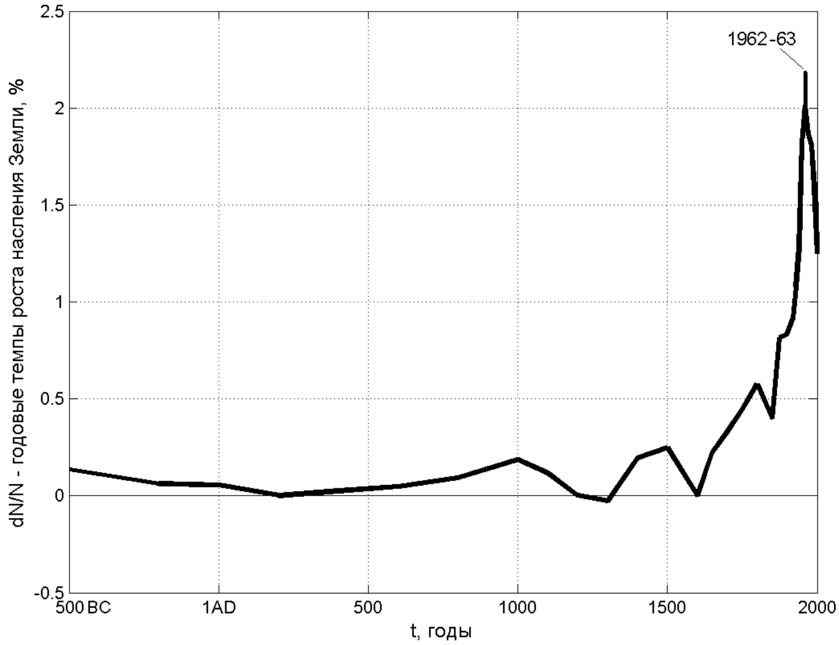
Таким образом, обнаруженная эмпирическая закономерность и даже ее удачная математическая интерполяция сами по себе не дают понимания фундаментальных законов и, наоборот, подталкивают к мистификации результатов. По всей видимости, абсолютизация одного фактора (демографии или сингулярности во времени), действительно является примером чрезмерной редукции, недоучетом других не менее важных факторов развития. Поскольку и излишняя редукция, и полный отказ от какой-либо редукции – ведут к одному и тому же результату – мистификации и стоящему за ней агностицизму, выход из этой ситуации может быть только один – необходимо найти золотую середину. Степень упрощения системы должна быть ровно таковой, чтобы количество включенных факторов было, с одной стороны, минимально необходимым для описания наблюдаемых эмпирических закономерностей, а с другой стороны – достаточным для того, чтобы входящие в модель зависимости предполагали четкую и понятную, согласующуюся с повседневной логикой интерпретацию.

Модель роста населения Земли и технологии М. Кремера

Демографический императив С. П. Капицы имеет своим следствием достаточно смелое утверждение о том, что рост численности населения на протяжении десятков тысяч лет зависел только от самой численности населения, и, судя по адекватности описания, даваемого формулой (III.7), никак не связан ни с какими другими внешними факторами, такими, как, в частности, факторы окружающей среды, производительные силы, ресурсные ограничения. Таким образом, логично заключить, что рост численности населения, обусловленный, что важно, четким детерминированным законом, не имеет той ресурсной основы, которую принято предполагать в моделях популяционной динамики как основополагающее понятие потолка несущей способности среды (III.2). С. П. Капица совершенно справедливо отмечает, что происходящий демографический переход никак не связан с ресурсными ограничениями. Наблюдаемое сейчас быстрое снижение темпов роста населения наблюдается на фоне роста ресурсной базы.

Действительно, рассмотрим график темпов роста населения (см. Диаграмму III.1):

Диаграмма III.1. Динамика изменения относительных темпов роста населения мира, 500 г. до н.э.–2000 г. н.э. (%)



В глаза бросается стремительное падение темпов роста, произошедшее за последние несколько десятков лет – микроскопическое по историческим масштабам время. Общий вид графика, его колебательный характер, может подтолкнуть к мысли, что, вполне возможно, нынешнее падение темпов роста – это проявление одного из циклов, которых за историю было немало, и что это временное явление, которое в скором будущем сменится столь же стремительным ростом. Однако это логичное заключение имеет серьезный изъян. В действительности, нынешнее падение темпов роста коренным образом отличается от спадов и колебаний прошлого. Это не очередное колебание, это – фазовый переход на новый, не типичный для всей прежней истории, режим развития. Если все предыдущие спады были вызваны, прежде всего, увеличением смертности вследствие различных катаклизмов – войн, голода, эпидемий и по мере завершения этих бедствий человечество быстро восстанавливалось и выходило на прежнюю траекторию, то нынешнее падение вызвано качественно отличными причинами – *резким снижением рождаемости*. Это снижение связано не с приближением к потолку несущей способности среды, а с причинами, заключенными в самом человеке. С. П. Капица подчеркивает информационный аспект развития общества, доминанту психологии и поведенческих функций над ресурсными и прочими материальными факторами. Таким образом, С. П. Капица четко показывает, что именно информационная составляющая, внематериальный демографический императив, является основным законом развития всего человечества.

С другой стороны, многовековая экономическая традиция, связывающая любые изменения в социуме прежде всего с ресурсно-производственными изменениями, естественным образом видит рост населения не самопричинным, а всего лишь следствием развития экономических отношений и роста производительности труда. Основное положение было сформулировано еще в XVIII веке Томасом Мальтусом (Malthus [1798] 1978; Мальтус 1993). Его можно переформулировать следующим образом:

"На протяжении большей части существования человечества рост его численности на каждый данный момент времени был ограничен потолком несущей способности земли, обусловленным наблюдаемым в данный момент времени уровнем развития жизнеобеспечивающих технологий". (III.12)

В той или иной форме данное положение использовалось многими более поздними исследователями (Postan 1950; Habakkuk 1953; Braudel 1973; Cameron 1989; Usher 1989; Artzrouni and Komlos 1985; Kremer 1993; Chu and Lee 1994; Komlos and Nefedov 2002; Мугрузин 1986, 1994; Кульпин 1990; Бродель 1992; Нефедов 1999а, 1999б, 1999в, 1999г, 1999д, 2000а, 2000б, 2001а, 2001б, 2002а, 2002б, 2003, 2005; Малков 2002, 2003, 2004; Малков, Ковалев, Малков 2000; Малков и др. 2002; С. Малков, А. Малков 2000; Малков, Сергеев 2002, 2004а, 2004б; Ганджа, Геворкян, Русаков 2003; Turchin 2003, 2005a, 2005b; Nefedov 2004; Малков, Селунская, Сергеев 2005; Turchin and Korotayev 2006 и т.д.). Таким образом, многочисленные работы на стыке экономики и демографии отдают главную роль именно экономико-технологическому фактору, предполагая демографическую составляющую подчиненной, что коренным образом противоречит идее демографического императива и выдвигает императив экономический. Данное направление также опирается и на эмпирические данные, и на математические модели, дающие столь же замечательное совпадение с демографическими данными.

Наиболее математизированной и разработанной работой в этой области представляется исследование М. Кремера (Kremer 1993): "Population Growth and Technological Change: One Million B.C. to 1990 (Рост населения и технологические изменения: от одного миллиона лет до нашей эры до 1990 года)". В этой работе представлены сразу несколько моделей, с разных сторон описывающих процесс взаимного роста численности населения и уровня технологии.

Простейшая модель, предлагаемая М. Кремером, предполагает, что производство продукта зависит от двух факторов: уровня технологии и численности населения. У М. Кремера для величин используются обозначения *Y* – производимый продукт, *p* – численность населения, *A* – уровень технологии и т.п., мы же при описании запишем его модель в обозначениях, используемых в предложенной нами модели и более близкие к обозначениям С. П. Капицы, не искажая при этом сути уравнений М. Кремера.

М. Кремер считает, что совокупный производимый человечеством продукт равен

$$G = TN^{\alpha}V^{1-\alpha}$$

где G – общий продукт, T – уровень технологии, V – используемые земельные ресурсы, $0 < \alpha < 1$ – параметр. Фактически, в дань экономической теории М. Кремер использует функцию типа Кобба-Дугласа, применение которой в данном случае, на наш взгляд, не вполне оправдано. М. Кремер, впрочем, и сам понимает это и сразу же оговаривает, что переменная V в результате нормализации приравнивается к единице (что также спорно, поскольку используемые для производства территории серьезно расширялись со временем). В любом случае, уравнение для производимого продукта в результате имеет вид:

$$G = rTN^{\alpha}, \tag{III.13}$$

где r, α – некоторые константы.

Далее М. Кремер использует положение (III.12), формулируя его следующим образом: "В упрощенной модели будем считать, что численность населения мгновенно приближается к равновесному уровню $\bar{N}$". Величина $\bar{N}$ в его модели соответствует уровню населения, при котором оно производит на душу населения равновесный продукт $\bar{g}$, такой, что население увеличивается, если среднедушевой продукт выше $\bar{g}$, и уменьшается, если среднедушевой продукт меньше $\bar{g}$.

Равновесный уровень населения *N*, таким образом, равен

$$\overline{N} = \left(\frac{\overline{g}}{T}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}. \qquad \text{(III.14)}$$

Таким образом, уравнение для численности населения фактически не является динамическим. В модели М. Кремера динамика заложена в уравнение для технологического роста, который, как отмечалось, в широкой среде исследователей-экономистов рассматривается как первичный фактор развития человечества, в частности, вызывающий рост населения. М. Кремер уделяет большое внимание этому фактору, анализируя различные гуманитарные концепции и математические модели роста технологии.

Наряду с другими исследователями (Aghion and Howitt 1992; 1998; Grossman and Helpman 1991 и т.д.) он исходит из "босерупианского" (Boserup 1965) предположения о том, что рост населения подталкивает людей к разработке новых технологий, и, в конечном счете, рост технологии пропорционален населению. Данный тезис ранее выдвигался С. Кузнецом (Kuznets 1960) и Дж. Саймоном (Simon 1977) в формулировке "Большее население означает большее количество потенциальных изобретателей". М. Кремер уточняет его:

"Простая модель предполагает, что, при прочих равных, вероятность изобретения чего-либо одним человеком не зависит от численности населения. Таким образом, среди большего населения будет пропорционально больше людей, достаточно удачливых и сообразительных, чтобы предложить новые идеи" (Kremer 1993: 685). (III.15)

Математически данное положение М. Кремер выражает как

$$\frac{dT}{dt} = cNT, \qquad \text{(III.16)}$$

где c – средняя инновационная продуктивность одного члена популяции.

Рост технологического уровня вовсе не ограничивается актом изобретения. Для того чтобы оно утвердилось и внесло вклад в общий технологический уровень, необходимо также, чтобы оно победило в конкурентной борьбе с ранее существующими технологиями, допускало внедрение и тиражирование – то есть, было адекватно существующим технологиям, а также оно должно распространиться пространственно. Таким образом, если изобретение дает слишком малые преимущества по сравнению с текущим уровнем, то оно, скорее всего, не утвердится в конкурентной борьбе, которая обладает большой инерцией, а если же оно слишком революционно, то у него также малые шансы на утверждение, поскольку общий уровень технологии слишком низок для его обслуживания. Так было с изобретениями Леонардо да Винчи, так получилось с пилотируемой космонавтикой, которая совсем не оправдала ожиданий бума космических путешествий в конце XX века, то же можно сказать и о многих изобретениях древности, не дошедших до нас, поскольку они не были поддержаны существующим на тот момент уровнем технологии. В итоге успех имеют те инновации, которые продвигают технологический уровень на величину одновременно не слишком малую, и не слишком большую по сравнению с текущим уровнем.

Таким образом, озарение изобретателя – это только флуктуация, во многом случайная мутация, которая затем проходит более суровый и объективный отбор, жестко связанный с текущим уровнем технологии. При этом интенсивность флуктуаций – число изобретений и (что не менее важно) попыток их внедрения, также является важным фактором наряду с технологическим уровнем. Эти объективные, не зависящие от сознания человека механизмы, фактически и определяют общий смысл соотношения (III.16).

Хотя зависимость роста от текущего уровня и от интенсивности изобретений очевидна, она вовсе не обязана быть линейной (если обратное не доказано эмпирически). М. Кремер апеллирует к уравнению роста технологии К. Джоунса (Jones 1995):

$$\frac{dT}{dt} = bNT^{\phi},$$

где ϕ - показатель, не равный единице, и связывающий текущий уровень технологии со скоростью ее прироста. С математической точки зрения, в случае, если $\phi > 1$, с ростом технологии наблюдается ускорение относительных темпов роста, то есть, по сути, увеличение относительной производительности одного изобретателя. Если же $\phi < 1$, то наоборот, относительная производительность изобретателя падает по мере того, как технология развивается.

Сам К. Джоунс считает, что $\phi < 1$, поскольку это, по его мнению, объясняет замедление технологического роста в послевоенный период. Однако М. Кремер отмечает (Kremer 1993: 689), что вполне возможно, что все-таки $\phi = 1$, то есть модель (III.16) верна, ссылаясь на долгосрочные экономические тренды роста технологии (Romer 1986).

Наконец, дабы охватить все возможные зависимости, К. Джоунс предлагает также ввести степенную зависимость для численности населения, получая наиболее общее уравнение:

$$\frac{dT}{dt} = bN^{\psi}T^{\phi}. \tag{III.17}$$

Таким образом, в общем случае относительная производительность одного изобретателя зависит и от текущего уровня технологии, и от количества других изобретателей.

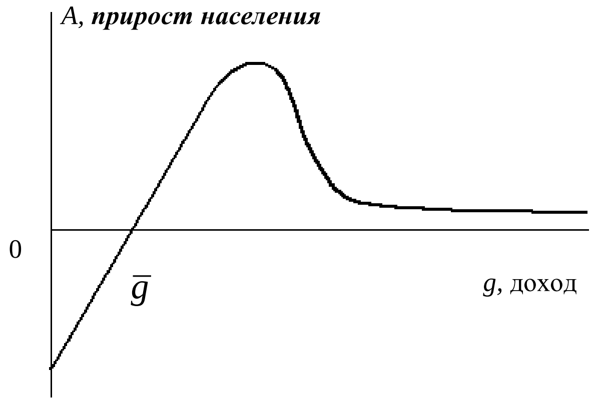
Опираясь на данное уравнение, М. Кремер модифицирует свою модель и дает оценки для параметров $\phi \approx 2/5$, $\psi \approx 6/5$.

В результате общая модель, учитывающая рост населения и технологии удовлетворительно описывает гиперболический рост населения, но, даже несмотря на искусственное снижение темпов роста связанное с тем, что $\phi < 1$, она не описывает демографического перехода, то есть резкого снижения темпов роста населения Земли за последние четверть века.

Понимая недостатки своей модели, М. Кремер пытается модифицировать ее с тем, чтобы она учла и это явление. Однако, оперируя двумя переменными – численностью населения и технологическим уровнем, он вынужден искать причины демографического перехода в самих этих переменных, подобно тому, как С. П. Капица искал причину демографического перехода в одной лишь численности населения.

Для того чтобы ввести в модель ограничения на рост населения, не выходя за рамки двух переменных, М. Кремер вынужден ввести достаточно сложную функцию, описывающую рождаемость как функцию от дохода (см. Диаграмму III.2):

Диаграмма III.2. Зависимость относительных темпов роста населения от доходов в модели М. Кремера



Здесь A – разница между рождаемостью и смертностью как функция от g – дохода на душу населения, который в модели рассчитывается как $g = G/N$, то есть общий продукт G, полученный по формуле (III.13) и поделенный между N членами популяции.

Из графика видно, что если продукт, приходящийся на одного человека меньше, чем критическое значение g , то наблюдается депопуляция, если он больше, но ненамного, то идет рост населения, если же общество становится достаточно богатым, то рост населения резко сокращается, поскольку богатые семьи не склонны иметь много детей.

Благодаря введению такой нелинейной функции у М. Кремера возникает возможность описания демографического перехода. Однако полученная в результате модель обладает рядом недостатков:

1. Введение функции $A(g)$ ведет к дополнительному усложнению модели, поскольку для ее описания М. Кремер неизбежно вынужден вводить в модель несколько новых параметров, которые, наряду с ϕ , ψ и другими коэффициентами нужно эмпирически оценивать, то есть модель из двух уравнений оказывается перегружена коэффициентами, что не всегда оправдано, так как не все посылки легко верифицируемы, а с точки зрения простой интерполяции можно ограничиться меньшим количеством коэффициентов – как, например, в модели С. П. Капицы.

2. Модель демографического перехода, включающая функцию $A(g)$, хотя и опирается на правдоподобные допущения о том, что большие заработки соответствуют меньшей рождаемости, а низкие заработки – высокой рождаемости, не может быть принята. Против этой модели явно говорит, например, нынешняя ситуация в России – резкое снижение уровня доходов в конце 80-х – начале 90-х гг. прошлого века вовсе не вызвало здесь всплеска рождаемости, как это предсказывает функция $A(g)$ (подробнее об этом см. в следующей части *Законов истории* [Коротаев, Комарова, Халтурина 2007]).

Таким образом, необходимо искать иные, хотя, вероятно, и близкие причины демографического перехода. Как мы помним, нам для адекватного описания процесса пришлось еще увеличить число динамических переменных, и рассмотреть динамику еще одного показателя наряду с численностью населения и уровнем технологии. Отметим, что добавление еще одной переменной не обязательно вызывает нежелательное усложнение модели, поскольку оно может привести к сокращению числа параметров и упрощению зависимостей.

В итоге, работа М. Кремера дала очень серьезное и правдоподобное математическое описание гиперболического роста населения Земли, причем опиралась она прежде всего на экономические механизмы и дала при этом ничуть не худшие результаты, чем работа С. П. Капицы. Однако в той части, где она касалась демографического перехода, ее объяснение все еще нельзя считать достаточным, даже несмотря на сильное усложнение модели и введение нескольких дополнительных параметров.

Модель роста жизнесберегающих технологий А. В. Подлазова

Таким образом, если причины гиперболического роста к настоящему времени оказались достаточно хорошо объяснены, причем эти объяснения опираются на вполне понятные предположения (III.12), (III.15), что является важным условием для избежания мистификации, то механизм глобального демографического вплоть до самого последнего времени не был описан математически с учетом предыдущей динамики роста населения мира.

Попытка описать это явление математически, найти объективные причины пределов роста была предпринята в работах А. В. Подлазова (2000, 2001, 2002; Podlazov 2004).

В своих работах А. В. Подлазов проводит синтез обеих описанных теорий. С одной стороны, он, подобно М. Кремеру (III.16), видит причины гиперболического роста в совместном процессе роста человечества и технологии. С другой стороны, причину демографического перехода, как и С. П. Капица, он ищет в самом естестве человека, его биологических параметрах и продолжительности жизни.

В безразмерных величинах модель гиперболического роста можно записать в виде

$$\frac{dN}{dt} = PN, \tag{III.18}$$

$$\frac{dP}{dt} = NP, \tag{III.19}$$

где N – численность населения, а P – уровень технологии. Хотя для уровня развития технологии мы использовали переменную T, для модели А. В. Подлазова технология будет обозначаться как P, поскольку М. Кремер и А. В. Подлазов понимают смысл технологии по-разному.

Уравнение (III.19) является аналогом уравнения (III.15). А уравнение (III.17) является очевидным дополнением к (III.18) для того, чтобы выполнялась эмпирическая зависимость (III.5), которая имеет следующую трактовку: емкость ниши пропорциональна уровню развития технологии (М. Кремер говорит о ресурсной нише, А. В. Подлазов – о технологической), и, следовательно, численность населения N будет следовать за емкостью ниши P:

$$N = kP, \tag{III.20}$$

где k – константа.

В отличие от М. Кремера, для которого технологии – это средство производства продукта (III.13), А. В. Подлазов видит роль технологий иначе. Он вводит понятие *жизнесберегающие технологии*. Роль технологий он видит в предотвращении смерти и продлении жизни безотносительно того, каким образом это достигается – за счет производства пищи, или за счет религиозных норм морали.

Стоит отметить, что само понятие жизнесберегающих технологий относится к сфере демографических исследований, поскольку оно явным образом связано с параметром смертности D в формуле (III.1), которую можно записать в виде:

$$\frac{dN}{dt} = (k_b - k_d)N, \qquad \text{(III.21)}$$

где k_b и k_d – коэффициенты рождаемости и смертности, из которых А. В. Подлазов полагает k_b постоянным и равным k_b^0 – коэффициенту рождаемости на начало фазы роста, а коэффициент смертности k_d – переменным, существенно зависящим от уровня жизнесберегающих технологий, собственно и определяемых как

$$P = k_d - k_d^0, \qquad \text{(III.22)}$$

причем в силу отсутствия роста на стадии, предшествующей стадии роста, А. В. Подлазов считает, что $k_b^0 = k_d^0$.

Таким образом, уравнение (III.21) дает следующую формулу:

$$\frac{dN}{dt} = k_b^0 N - k_d N = k_b^0 N - k_d^0 N + (k_d - k_d^0)N = k_b^0 N - k_d^0 N + PN, \qquad \text{(III.23)}$$

а с учетом (III.19) имеем

$$\frac{dN}{dt} = k_b^0 N - k_d^0 N + cN^2, \qquad \text{(III.24)}$$

где k_b^0, k_d^0, c – постоянные; очевидно, что с учетом равенства $k_b^0 = k_d^0$ уравнение (III.24) с математической точки зрения эквивалентно уравнению (III.7).

Любопытно провести аналогии между (III.24) и (III.3). Они отличаются лишь знаком квадратичного члена, однако это различие в одном случае приводит к стагнации населения, а в другом – ведет к взрывообразному росту. Тем не менее, уравнения вида (III.24) не являются специфичными только для описания численности населения, такие уравнения используются и в биологии, когда между членами популяции существует взаимопомощь.

Что же касается ограничения гиперболического роста, то А. В. Подлазов видит причину демографического перехода в том, что невозможно до бесконечности понижать коэффициент смертности. Таким образом, уровень P ограничивается биологическим пределом человеческого организма, что дает ограничение $P_\infty \approx 0{,}05$ *год*$^{-1}$. При этом стадию демографического перехода А. В. Подлазов предлагает описывать уравнением

$$\frac{dP}{dt} = N(P_\infty - P) \tag{III.25}$$

Таким образом, демографический переход, по мнению А. В. Подлазова, неизбежен и связан не с какими-то ни было ресурсными ограничениями, а исключительно с внутренними особенностями человеческого организма.

Итак, А. В. Подлазов, как и М. Кремер, объясняет механизм гиперболического роста с позиций развития технологий. При этом он вводит понятие жизнесберегающих технологий, тесно связанных с демографической смертностью. Что касается демографического перехода, то, по мнению А. В. Подлазова, он связан с невозможностью бесконечного увеличения уровня жизнесберегающих технологий, так как в любом случае смертность по определению не может быть снижена до нулевого или отрицательных значений.

Работа А. В. Подлазова, безусловно, является шагом вперед в области теоретической демографии. Введенное им понятие жизнесберегающих технологий открывает перспективы для введения демографически ориентированной шкалы для различных и плохо сопоставимых технологических инноваций. В свете необходимости описания глобального демографического процесса, важность адекватного измерения уровня технологии очевидна. Однако, несмотря на подобные перспективы, практическое использование этой шкалы на данный момент затруднено, поскольку имеющиеся данные противоречат вытекающему из модели А. В. Подлазова выводу о том, что гиперболический рост населения Земли на всем его протяжении сопровождался снижением смертности.

Исследования показывают, что в течение нескольких тысячелетий неолитической революции[2] и последующей интенсификации производящей экономики гиперболический рост населения Земли сопровождался не уменьшением, а увеличением смертности и сокращением средней продолжительности человеческой жизни (Cohen 1977: 39; 1987; 1989; 1995; 1998; Cohen and Armelagos,1984). Действительно, начиная с неолитической революции и вплоть до эпохи завершения становления высоких цивилизаций интенсивных земледельцев наблюдается устойчивая тенденция к падению средней продолжительности человеческой жизни. И ничего особо удивительного в этом нет. Конечно, когда антропологи обнаружили, что бушмены Калахари имели структуру питания (количество килокалорий, соотношения и абсолютные количества белков, жиров, углеводов, витаминов, микроэлементов), полностью соответствующую рекомендациям Всемирной организации здравоохранения, они были удивлены. Хотя чего тут удивляться. Действительно, человеческая биограмма формировалась в

[2] Переход от присваивающего хозяйства (охоты, собирательства и рыболовства) к производящему хозяйству (земледелию и скотоводству) как ведущему способу жизнеобеспечения.

условиях охотничье-собирательского образа жизни, и именно к этим условиям она и приспособлена. Переход к производящему хозяйству практически неизбежно вел к ухудшению условий человеческого существования (поэтому-то при отсутствии кризиса охотники-собиратели к производящему хозяйству, как правило, и не переходят). Ведь что такое производящее хозяйство? Это искусственное увеличение биомассы крайне ограниченного числа видов "домашних" животных и растений в ущерб биомассе всех остальных съедобных растений и животных. При этом дальнейшая интенсификация сельского хозяйства ведет, как правило, лишь к дальнейшему увеличению в диете людей крайне ограниченного числа культур (наиболее продуктивных, и калорийных, а значит, содержащих из питательных веществ мало чего кроме углеводов) в ущерб всему остальному.

Диета становится все менее разнообразной, углеводной, содержащей все меньше белков и витаминов. Оседлость приводит к ухудшению санитарной обстановки, усугубляющейся все большей скученностью населения. Растет число паразитов, патогенов, что дополнительно усугубляется развитием коммуникации, влекущим за собой распространение в поясе высоких цивилизаций все новых и новых заболеваний. В результате, на выходе мы имеем такие цифры средней продолжительности жизни (с учетом высочайшей детской смертности) как 18–19 лет для Теотиуакана или 15–16 лет для жителей города Рима эпохи принципата (см., например: Storey 1985).

Отметим, что никакого противоречия с наблюдавшимся в эти же самые тысячелетия гиперболическим ростом населения Земли здесь нет – просто шел он не за счет снижения смертности, как это следовало бы ожидать по модели А. В. Подлазова, а за счет гиперболического роста технологически обусловленного потолка несущей способности Земли. Дело в том, что неолитическая революция и последующая интенсификация производящего хозяйства привели к росту рождаемости за счет радикального увеличения уровня оседлости, росту содержания углеводов в диете, появлению аналогов детского питания (разного рода каш), позволивших сократить срок кормления грудью с соответствующим сокращением периода между родами и т.п. Гиперболический же рост потолка несущей способности Земли позволял это все увеличивавшееся количество людей прокормить. В результате темпы роста рождаемости устойчиво опережали темпы увеличения смертности, что и привело к наблюдавшейся в рассматриваемые тысячелетия гиперболической тенденции роста населения Земли[3] (Файн-

[3] Отметим, что по оценкам М. Кремера (Kremer 1993: 683), впечатляющий гиперболический рост населения мира в неолитическую и постнеолитическую эпоху (X–I тыс. до н.э) сопровождался не слишком значительным увеличением относительной скорости демографического роста в абсолютном масштабе (с 0,003% в год в преднеолитический период до 0,14% в год в 1000–500 гг. до н.э.). Такой рост мог быть достигнут, скажем, при росте уровня

берг 1974: 76–77; 1986: 144, 191–192; Массон 1975: 29; Хазанов 1979: 128; Козинцев 1980; Алексеев 1989; Коротаев 1991; Федосова 1994; Boserup 1965; Lee and DeVore 1968: 5; Sahlins 1972; Storey 1985; Cohen 1977: 39; 1987; 1989; 1995; 1998; Cohen and Armelagos,1984; Harris 1978; Ember and Ember 1999: 152–153; Diamond 1999 и т.д.).

Отметим, что при всем внешнем сходстве с моделью А. В. Подлазова уже наша первая компактная макромодель свободна от противоречия с фактическими данными. Согласно нашей модели в мальтузианском контексте гиперболический рост потолка несущей способности Земли будет вести к гиперболическому росту населения мира в любом случае, вне зависимости от того каким путем это достигается – преимущественно ли через падение смертности (как это наблюдалось, например, в 1800–1962 гг.), через опережение ростом рождаемости роста смертности (как это происходило в тенденции в неолитическую и постнеолитическую эпохи), либо через какое-то иное сочетание этих показателей.

Другим "узким местом" модели А. В. Подлазова является суждение о том, что демографический переход вызван невозможностью бесконечного уменьшения смертности. Демографические данные четко указывают на то, что переход связан с резким уменьшением рождаемости. Действительно, в (III.23) А. В. Подлазов постулирует постоянный уровень рождаемости, что для стадии демографического перехода неприемлемо.

Выходом из такой контрфактической ситуации могло бы стать признание смысла жизнесберегающих технологий не как технологий, ограничивающих смертность, а как технологий, увеличивающих разницу между рождаемостью и смертностью. Для большей части человеческой истории это предположение работало бы неплохо. Однако и такое объяснение не согласуется с предположениями А. В. Подлазова, поскольку в этом случае на стадии стабилизации населения эта разница должна стать равной нулю, что мало согласуется с понятием уровня технологии.

Наконец, не проработанным у А. В. Подлазова остается переход от формулы (III.19) к формуле (III.25), то есть переход с режима роста на режим демографического перехода.

Производство ВВП на душу населения как показатель уровня развития технологии

Обсуждаемые выше модели с математической точки зрения хорошо описывают гиперболическую зависимость (III.5), однако нередко они оперируют общими теоретическими соображениями, не подкрепленными численными данными, вводят плохо измеримые показатели. Поэтому чрезвычайно важно свести теоретические построения с наблюдаемыми эмпири-

смертности с 3% до 4% при одновременном росте рождаемости с 3 до 4,14% (за счет обусловленного вышеназванными факторами уменьшения промежутка между родами).

ческими данными. Понятно, что в нынешних условиях, когда имеющиеся данные малочисленны и не всегда заслуживают доверия, построение опирающейся на них модели необходимо проводить чрезвычайно осторожно, однако иного пути нет.

Работы М. Кремера и А. В. Подлазова предполагали, что численность населения и уровень технологии существенно связаны друг с другом. Однако в явном виде связь между этими показателями была представлена только на теоретическом уровне. Предложенные зависимости (III.16) и (III.19) исходят из общих соображений, не в полной мере опирающихся на эмпирическую базу, кроме того, уравнения (III.16) и (III.19) по-разному трактуют понятие "уровень технологии".

Таким образом, первой задачей является определиться с пониманием "уровня технологии", которое в дальнейшем мы будем использовать в модели.

По нашему мнению, наиболее естественным измеримым интегральным показателем, соответствующим понятию "уровень технологии", является *производство ВВП на душу населения*.

При всех тонкостях измерения данного показателя, в рамках макромодели мы будем измерять его простым образом:

$$T = \frac{G}{N}, \tag{III.26}$$

где T – производство ВВП на душу населения, в рамках нашей модели понимаемый как показатель уровня развития технологии, G – мировой ВВП, N – численность населения.

Очевидно, что производство ВВП на душу населения не является одинаковым для разных регионов мира, но макроуровень, на котором проводится моделирование, допускает введение таких обобщенных показателей, подобно тому, как модели С. П. Капицы, М. Кремера и А. В. Подлазова не учитывают неравномерности распределения населения и берут общую численность населения в виде интегрального показателя.

Выбор ВВП на душу населения в качестве показателя уровня развития технологии является вполне естественным. Таким образом, производство ВВП на душу населения отражает не только собственно производственные технологии, но и является показателем уровня развития политических, социальных, гуманитарных, образовательных и прочих технологий, в конечном счете, приводящих к увеличению ВВП. Следует заметить, что наше понятие T в (III.26) близко по смыслу к понятию уровня технологии М. Кремера, хотя он отдельно не делает акцент на том смысле, которое он вкладывает в используемый им в (III.13) показатель T.[4]

---

[4] Вместе с тем необходимо подчеркнуть, что для доиндустриальных обществ производство ВВП на душу населения может рассматриваться в качестве показателя уровня технологи-

Эмпирическое подтверждение связи численности населения и уровня технологии

Следующим шагом является обоснование использования введенного нами показателя *T* при моделировании глобального демографического процесса и построения модели, опирающейся на общепринятые в демографической науке уравнения.

Как отмечалось, одним из наиболее общих положений в популяционной динамике является использование логистического уравнения Ферхюльста (III.2). Оно описывает динамику популяции в условиях ресурсного ограничения и замечательно работает для многих биологических видов – от микроогранизмов до крупных животных. Что касается его применимости к описанию демографического процесса, то эмпирические данные по гиперболическому росту населения (III.4) и постоянный рост потолка несущей способности Земли, казалось бы, делают уравнение (III.2) неприменимым для описания роста численности населения.

Тем не менее, есть предпосылки к использованию этого уравнения, поскольку в его пользу говорит подтверждаемый историческими данными мальтузианский тезис (III.15), а также то, что потолок несущей способности Земли вполне можно описывать переменной, зависящей от объема производимого продукта и, следовательно, от уровня технологии (III.26).

Если обобщить эти выводы, то их можно записать в виде:

$$\frac{dN}{dt} = rN(1 - w\frac{N}{T}), \qquad \text{(III.27)}$$

где *r*, *w* – коэффициенты.

Уравнение имеет вид (III.2) и строится из тех соображений, что потолок несущей способности Земли ограничен уровнем существующей технологии. При возникновении относительной перенаселенности население возвращается к сбалансированной численности – как правило, за счет

ческого развития только в максимально долгосрочной перспективе – в масштабе многотысячелетнего тренда, но не в более краткосрочном масштабе "вековых" социально-демографических циклов. В подобной более краткосрочной перспективе уровень производства ВВП на душу населения определяется прежде всего фазой социально-демографического цикла: на начальных фазах (после политико-демографического коллапса), когда пережившее коллапс население оказывается хорошо обеспеченным ресурсами, наблюдается относительно высокий уровень производства ВВП на душу населения. На последующих фазах по мере заполнения экологической ниши (в результате демографического роста) производство ВВП на душу населения обычно падает, а так как в пределах цикла обычно наблюдался определенный технологический рост, то в пределах вековых циклах корреляция между уровнем технологического развития и производством ВВП на душу населения обычно оказывалась отрицательной, т.е. прямо противоположной той, что наблюдается на уровне тысячелетнего тренда (подробнее это рассматривается в следующей части *Законов истории* [Коротаев, Комарова, Халтурина 2007]).

недоедания, войн, эпидемий и т.п., при недонаселенности возникает быстрый рост в условиях пониженной конкуренции, и население стабилизируется на уровне потолка, пока какое-нибудь, возможно малое, воздействие не отклонит его, вызывая очередное колебание. Скорость выхода на уровень потолка несущей способности как сверху – военные конфликты и эпидемии, так и снизу – восстановление после этих бедствий, зависит от способности людей оперативно уничтожать и восстанавливать друг друга и инфраструктуру. В этом предположении коэффициент r, отвечающий за скорость выхода на потолок несущей способности, также должен зависеть от уровня технологии. В простейшем случае линейной зависимости можно представить следующую модель роста населения:

$$\frac{dN}{dt} = vTN(1 - w\frac{N}{T}) = vN(T - wN) \qquad \text{(III.28)}$$

где v и w – постоянные коэффициенты. В подобной формулировке отношение T к w приобретает вполне четкий смысл – это количество людей, которое может прокормить Земля при заданном уровне технологии T.

Модель (III.28), будучи также объединена с уравнением (III.16), асимптотически дает гиперболический рост. При задании начальных условий, для которых население сильно отличается от детерминированного уровнем технологии потолка несущей способности, население очень быстро выходит на него и затем следует за этим потолком, который, в свою очередь растет ускоряющимися темпами.

Таким образом, модели популяционной динамики не теряют своей актуальности и в описании демографических процессов, особенно процессов, идущих на сравнительно малых временных масштабах. Действительно, моделирование демографических циклов и колебаний вокруг тренда под воздействием дестабилизирующих факторов может быть хорошо описано с позиций уравнения (III.27) и его модификаций. Однако при описании макродинамики такого рода быстрые процессы выхода на траекторию, вдоль которой система движется относительно медленно, вообще часто не выделяются в отдельные уравнения. Согласно теореме Тихонова (1952), в системе уравнений дифференциальное уравнение для переменной, имеющей значительно меньшее характерное время изменения по сравнению с другими переменными, может быть заменено алгебраическим (при условии, что характер решения не меняется при устремлении малого параметра при производной к нулю). В работах М. Кремера и А. В. Подлазова фактически использовалось это положение теоремы Тихонова, а также неявно задавалось ограничение (III.27) численности населения уровнем технологии: М. Кремер (III.14), А. В. Подлазов (III.20).

Что же касается более медленных изменений, то для описания этих изменений следует использовать модели другого порядка характерных скоростей изменений.

С учетом того, что население быстро выходит на квазистационарную траекторию, ресурсные ограничения выступают в качестве членов другого порядка малости:

$$\frac{dN}{dt} = aTN(1 - m\frac{N}{G}), \tag{III.29}$$

то есть как ограничения, связанные с необходимостью излишка, обеспечивающего устойчивый рост тренда, вокруг которого совершаются колебания. Уравнение (III.29) перепишем в виде

$$\frac{dN}{dt} = aN(T - m), \tag{III.30}$$

где a и m – коэффициенты. Данное уравнение также имеет вполне популяционную трактовку: прирост наблюдается в случае, когда производится продукта больше, чем необходимо для воспроизводства населения при нулевом уровне роста. Коэффициент m играет роль "прожиточного минимума" – доли произведенного ресурса, строго направляемого на поддержание достигнутой численности населения. Прирост возможен, только если наблюдается разница между продуктом, произведенным и потраченным на одного человека. Согласно модели T – производство ВВП на душу населения, а m – минимально необходимый продукт на одного человека, таким образом, разность $(T - m)$ – это ресурс на душу населения, который может быть потрачен на дополнительные цели – расширенное воспроизводство населения, науку, искусство, развлечения и пр.

Таким образом, целесообразно ввести переменную

$$S = T - m, \tag{III.31}$$

имеющую смысл *излишков* на душу населения, которые могут быть использованы на дополнительные цели помимо поддержания достигнутой численности населения.

С учетом данной поправки можно записать следующую модель:

$$\frac{dN}{dt} = aNS, \tag{III.32}$$

$$\frac{dS}{dt} = bNS, \tag{III.33}$$

где a и b – константы. Уравнение (III.32) является записью уравнения (III.30) с учетом (III.31), а уравнение (III.33) является уравнением роста технологии, поскольку, очевидно, с учетом предположения о постоянстве m в (III.31), имеет место равенство

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dS}{dt} . \qquad \text{(III.34)}$$

Уравнения (III.33), (III.19) и (III.16) с математической точки зрения абсолютно идентичны, и, как нетрудно убедиться, в сочетании с (III.32) или, что то же, (III.18) дадут гиперболический рост переменной *N*. Существенным различием, однако, является понимание переменных, отражающих технологический смысл. Напомним, что *T* в уравнении (III.16) – это, по сути, коэффициент при производственной функции Кобба-Дугласа, не вполне четко декларированный М. Кремером, а *P* в уравнении (III.19) – это уровень жизнесберегающих технологий, используемых А. В. Подлазовым, которые также не имеют четкого операционализированного определения и способов измерения. В то же время *S* в (III.33) – это излишек на одного человека, производимый при данном уровне технологии и данной численности населения.

Понятно, что введение дополнительных переменных и показателей может быть оправданным только тогда, когда оно дает какое-то новое качество. На наш взгляд, введение новых понятий и модификация уравнений должны служить цели более адекватного описания действительности и эмпирических данных.

Для подтверждения уравнений (III.32) и (III.33) целесообразно использовать данные по динамике мирового ВВП (см. выше Диаграмму 5.2).

За последние 2000 лет (существуют оценки и для более ранних периодов, которые не противоречат модели, но мы их не рассматриваем, поскольку их достоверность должна быть еще должным образом обоснована) мировой ВВП (источники: Мельянцев 1996, 2003, 2004; Meliantsev 2004; Maddison 1995, 2001; World Bank 2006) хорошо описывается формулой

$$G = \widetilde{m}N + \gamma N^2 , \qquad \text{(III.35)}$$

где $\widetilde{m}$, γ – константы. (на Диаграмме 5.2 $\gamma = 1{,}04 \cdot 10^{-6}$; $\widetilde{m} = 221{,}15$; ВВП измерялся в международных долларах 1995 года в паритете покупательной способности). Этот факт дает основание рассматривать систему (III.32) – (III.33) с позиций эмпирических данных. Можно сделать предположение относительно значения *m* в (III.31). Поскольку, в силу сделанных выше предположений, рост населения и технологии в (III.31) и (III.32) наблюдается только в том случае, если $S > 0$, то изначальный крайне маленький прирост населения мы можем считать нулевым, то есть $S_0 = 0$, что означает: $T_0 = m + S_0 = \widetilde{m}$. Следовательно,

$$T_0 = m = \widetilde{m} \qquad \text{(III.36)}$$

можно оценить как "производство ВВП на душу населения при изначальном уровне технологии" и как константу в (III.31).

Нетрудно убедиться, что сделанные предположения формулы (III.32)-(III.33), их решения и эмпирические данные по росту населения и ВВП не противоречат друг другу. Исходя из (III.31), (III.26), (III.35) и (III.36) получаем эмпирическое выражение

$$S = \gamma N\ , \tag{III.37}$$

которое одновременно удовлетворяет решению системы (III.32)-(III.33), дающему гиперболический рост населения мира и уровня технологии.

Следует также отметить, что при достаточно большой численности населения Земли линейным членом в (III.35) можно пренебречь и считать, что $T \approx S \sim N$. В частности, в 2000 году T составляет порядка 6000 долларов на человека в год, в то время как m – всего порядка 400. В результате для современной эпохи соотношения $G = \gamma N^2$ и $T = \gamma N$, выполняются с очень хорошей точностью.

Таким образом, понятие "уровень технологии" является хорошо операционализируемой и относительно легко измеримой величиной (с помощью показателя производства ВВП на душу населения), адекватной описанию глобального демографического процесса. Что важно, для этой величины удается найти эмпирическое подтверждение результатов модели (III.32)-(III.33).

Существование оценок численности народонаселения Земли, относящихся к глубокой древности, создает предпосылки для попыток описания глобального демографического процесса, начиная с миллиона лет до н.э. по настоящее время. Именно в этих масштабах рассматривается рост населения Земли в работах С. П. Капицы, М. Кремера и А. В. Подлазова. Впрочем, нам непонятно, о каком именно населении здесь идет речь применительно, скажем к 500.000 г. до н.э., поскольку возраст вида *Homo Sapiens*, по самым смелым предположениям, не превышает 180−200 тыс. лет (см. об этом, например: Степанов 2002: 13, Oppenheimer 2004: 39).

Несмотря на заманчивость глобальных теорий, мы сознательно ограничили область рассмотрения. Более или менее достоверные имеющиеся данные по производству ВВП относятся к периоду с начала нашей эры по нынешнее время (Maddison 1995, 2001), причем начиная с 1950 г. (Maddison 2001; World Bank 2006), они известны с большой точностью по каждому году. Таким образом, модель претендует на описание демографического и экономико-технологического роста за период с начала нашей эры по нынешнее время. Прогностические возможности модели также ограничиваются временами порядка столетия.