Коротаев А. В., Малков А. С., Халтурина Д. А. 2007. *Законы истории: Математическое моделирование развития Мир-Системы. Демография, экономика, культура*. М.: КомКнига/URSS. С. 29–37.

Глава 3

Компактная математическая макромодель роста населения мира (до 1962 г.)

Гиперболический рост населения подразумевает, что абсолютный прирост населения (N человек в год) пропорционален квадрату численности населения (в отличие от экспоненциального роста, при котором абсолютный прирост населения линейно пропорционален его численности). Если при экспоненциальном росте при численности населения в 100 миллионов чел. наблюдался абсолютный прирост в 100 тысяч человек в год, на уровне в 1 миллиард чел. он составит 1 миллион чел. в год (т.е. рост населения в 10 раз приводит к увеличению абсолютных темпов его роста в те же 10 раз). Если при гиперболическом росте при численности населения в 100 миллионов чел. наблюдался абсолютный прирост в 100 тысяч человек в год, то на уровне 1 миллиарда чел. абсолютный прирост населения составит уже 10 миллионов человек в год (т.е. рост населения в 10 раз приведет к увеличению абсолютных темпов его прироста в [10 × 10] 100 раз).

Отметим, что при экспоненциальном росте относительные темпы прироста населения (0,1 % в нашем случае) изменяться не будут, в то время как при гиперболическом росте они будут линейно пропорциональны численности населения (в нашем примере рост населения в 10 раз приводит к увеличению относительных годовых темпов прироста населения в те же 10 раз, с 0,1% to 1,0%). Соответственно, тенденция роста населения мира, наблюдавшаяся в 1990–2003 гг. может быть идентифицирована как ОБРАТНАЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ (т.е. логистическая[1]).

Тот факт, что для населения мира вплоть до 1960-х гг. был характерен гиперболический рост, был открыт уже достаточно давно (см., например: von Foerster, Mora, and Amiot 1960; von Hoerner 1975; Капица 1992, 1996, 1999; Kremer 1993; и т.д.).

---

[1] Подобная динамика, действительно, в некотором смысле прямо противоположна гиперболической. Если при гиперболическом росте относительные темпы прироста населения линейно растут с ростом его численности, то наблюдаемая в настоящее время тенденция характеризуется тем, что рост численности населения сопровождается линейным уменьшением относительных темпов его роста.

Было предложено и несколько математических моделей, описывающих этот рост (см., например: von Foerster, Mora, and Amiot 1960; von Hoerner 1975; Капица 1992, 1996, 1999; Kremer 1993; Cohen 1995; Подлазов 2000, 2001, 2002; Podlazov 2004; Johansen and Sornette 2001 и т.д.). Некоторые из этих моделей вполне компактны (см., например: Капица 1992, 1996, 1999), но не вполне объясняют механизмы гиперболического роста; модель М. Кремера содержит такое объяснение, но, довольно сложна[2] (подробный анализ предлагавшихся моделей см. ниже в Экскурсе 3).

Предлагаемая нами первая компактная макромодель гиперболического роста населения исходит из следующих допущений:

1) На протяжении большей части существования человечества рост его численности на каждый данный момент времени был ограничен потолком несущей способности земли, обусловленным наблюдаемым в данный момент времени уровнем развития жизнеобеспечивающих технологий (Мальтус 1993 [1798]; Malthus 1798; Habakkuk 1953; Postan 1950, 1972; Braudel 1973; Abel 1974, 1980; Artzrouni and Komlos 1985; Cameron 1989; Kremer 1993; Komlos and Nefedov 2002). Потолок несущей способности Земли повышался в результате роста уровня развития жизнеобеспечивающих технологий. Следовательно, на протяжении большей части существования человечества скорость роста его численности была прямо пропорциональна темпам роста уровня развития жизнеобеспечивающих технологий.

2) Относительные темпы роста уровня развития жизнеобеспечивающих технологий прямо пропорциональны численности населения Земли ("Чем больше людей, тем больше изобретателей"; при прочих равных условиях в десять раз большее число людей будет в тенденции делать в десять раз большее число сопоставимого уровня изобретений); при этом абсолютные темпы технологического развития также пропорциональны и самому уровню развития технологий (Kuznets 1960; Boserup 1965; Lee 1986; Grossman and Helpman 1991; Aghion and Howitt 1992, 1998; Kremer 1993; Simon 1977, 1981, 2000; Komlos and Nefedov 2002; Jones 1995, 2003, 2005 и т.д.).

Самым простым способом математического моделирования данных допущений представляется следующая (и, насколько нам известно, ранее не предлагавшаяся[3]) система из двух дифференциальных уравнений:

---

[2] Модель Дж. Э. Коуэна (Cohen 1995), на наш взгляд, является ухудшенной модификацией модели М. Кремера (Kremer 1993). Наименее удачной представляется модель А. Джохансена и Д. Сорнетта (Johansen and Sornette 2001), которая не обладает ни компактностью моделей Х. фон Ферстера и С. П. Капицы, ни объяснительной силой модели М. Кремера.

[3] Отметим, тем не менее, что близкая по сути своей модель уже предлагалась С. В. Цирелем (Tsirel 2004: 368). Подчеркнем, что математическая модель, предлагаемая нами в этой главе, имеет достаточно ограниченную научную ценность и представляет скорее определен-

$$\frac{dN}{dt} = a(bK - N)N \,, \qquad (3.1)$$

$$\frac{dK}{dt} = cNK \,, \qquad (3.2)$$[4]

где N это население Земли, K – уровень технологического развития, bK соответствует потолку несущей способности Земли при данном уровне развития жизнеобеспечивающих технологий.

ПОЯСНЕНИЯ К ПЕРВОЙ КОМПАКТНОЙ МАКРОМОДЕЛИ: Для читателей, не имеющих математического образования, поясним, как работает первая компактная макромодель.[5]

Модель записана при помощи дифференциальных уравнений. Начнем с первого уравнения: dN/dt = a (bK – N) N. *Как мы помним,* N *в нашей модели обозначает численность населения Земли.* dN/dt – *это изменение численности населения Земли (*dN*) за предельно краткий промежуток времени* dt. *Таким образом, рассматриваемое уравнение моделирует скорость изменения численности населения Земли.*

Реальная компьютерная симуляция долгосрочных исторических процессов обычно осуществляется при помощи разностных уравнений, где моделируется изменение тех или параметров, как правило, за год. Соответственно, в качестве dt *берется не предельно краткий, а вполне реальный промежуток времени, 1 год. Таким образом,* dN/dt *оказывается изменением численности населения за год. Подставив в формулу значения* K *и* N *за соответствующий год (*i*), мы можем узнать, как численность населения изменится в следующем году, а сложив* dN/dt *с численностью населения в этом году (*N_i*), мы подсчитаем, каким население мира станет к концу следующего года (*N_{i+1}*). Таким образом,* $N_{i+1} = N_i + dN/dt$. *Формула же для подсчета* dN/dt *у нас уже есть:* dN/dt = a (bK – N) N.

Итак, зная значения N *и* K *за этот год, мы можем подсчитать, каким будет население мира в следующем году (а при помощи второго уравнения модели мы можем подсчитать, и какой станет в следующем году несущая способность Земли,* K_{i+1}*). Таким образом, мы сделаем первую годичную итерацию, вычислив значения* N_{i+1} *и* K_{i+1}. *Теперь, зная значения* N_{i+1} *и* K_{i+1}, *мы можем сделать вторую годичную итерацию (подсчет изменений переменных за год), и узнать, каким будет население и несущая способность Земли через два года (т.е. подсчитать значения* N_{i+2} *и* K_{i+2}*), и т.д. Конечно, делать это лучше не в ручную, а, записав модель*

ный педагогический интерес благодаря своей простоте и наглядности. Более содержательные (но и более сложные для понимания) математические модели развития Мир-Системы предлагаются нами в следующих главах.

[4] Данное уравнение было впервые предложено М. Кремером (Kremer 1993). М. Кремер не провел прямой эмпирической проверки этой гипотезы. Вместе с тем, подобная эмпирическая проверка, проведенная нами (см. ниже Экскурс 4), полностью подтвердила обоснованность этой гипотезы.

[5] Отметим, впрочем, что некоторые разделы данных пояснений могут представлять определенный интерес и для читателей, математическое образование имеющих.

в виде компьютерной программы, запуская которую мы сможем осуществлять компьютерную симуляцию долгосрочных процессов эволюции Мир-Системы.

Вернемся, однако, к первому уравнению модели: dN/dt = a (bK – N) N. *В правой части уравнения записаны сформулированные выше допущения о факторах, определяющих скорость роста населения мира:* a(bK – N) N. *Начнем с переменной* N. *Каков смысл ее присутствия в правой части уравнения? Чтобы лучше себе это представить, допустим, что остальная часть,* a (bK – N), *является константой (это наблюдалось бы в том случае, если разрыв между несущей способностью Земли и населением сохранялся бы все время на одном уровне, а, следовательно, население мира росло бы с постоянной относительной скоростью). В этом случае нам следовало бы ждать экспоненциального роста населения, что и отражает присутствие переменной* N *в правой части уравнения. Его можно интерпретировать следующим образом: при прочих равных условиях [*a(bK – N) = const.*] абсолютная скорость роста населения (*dN/dt*) будет прямо пропорциональна самой численности населения. За данным обстоятельством стоит тот очевидный факт, что при прочих равных условиях миллион женщин родит детей в приблизительно сто раз больше, чем десять тысяч женщин. Отметим, что при экспоненциальном росте с увеличением численности населения будет увеличиваться только абсолютные темпы роста населения, относительная же скорость роста будет оставаться постоянной. Допустим, что* a(bK – N) = 0,01. *При населении мира в 10 миллионов человек это будет давать абсолютную скорость роста в 100 тыс. человек в год (*10.000.000 × 0,01 = 100.000*). При росте в десять раз населения (до ста миллионов человек) в десять раз (до одного миллиона человек в год) вырастет и абсолютная скорость роста населения; его же относительная скорость роста (1% в год) не изменится.*

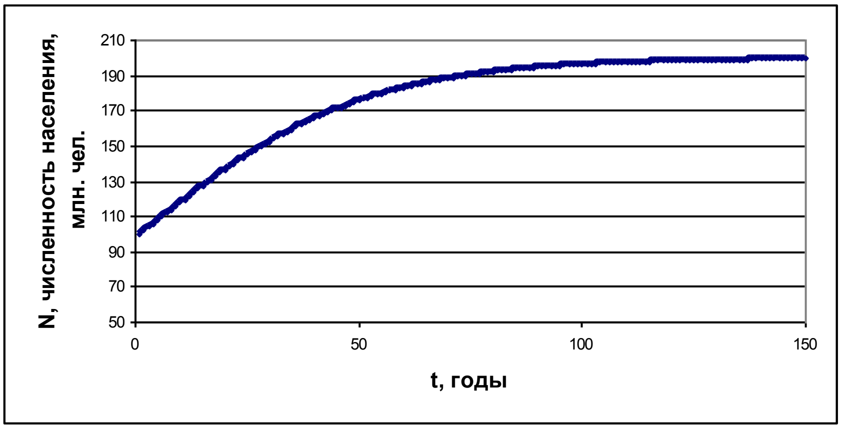
Однако ни в реальности, ни в нашей модели относительные темпы роста населения a(bK – N) *константой не являются. Рассмотрим вначале, какой динамика роста населения Земли была бы, если бы* K, *начиная с какого-то момента оставалась постоянной (т.е., всякий технологический прогресс, ведущий к повышению потолка несущей способности Земли, начиная с какого-то момента полностью прекратился). Значение коэффициента* b *выберем равным* 1, *т.е. будем мерить* K *непосредственно тем числом людей, которое Земля может прокормить при данном уровне технологии.*

В качестве начального значения численности населения Земли (N_0*) возьмем* 100 *миллионов человек, а в качестве значения несущей способности Земли (*K, *которая, напомним, в этом примере будет оставаться постоянной) –* 200 *миллионов человек (а в дальнейшем для упрощения будет производить все расчеты в миллионах человек). Т.е. для примера мы смоделируем следующий сценарий – в начале мы имеем уровень технологического развития, позволяющий прокормить на Земле* 200 *миллионов человек, при том, что реальная численность народонаселения составляет* 100 *миллионов человек. Примем значение коэффициента* a *равным* 0,0002 *(что, даст нам начальную скорость роста, соответствующую некоторым оценкам максимальной относительной скорости роста доиндустриального населения, 2% в год [Turchin 2003]). На сколько у нас вырастет население мира в первый год симуляции?*

Посчитаем прирост с использованием формулы dN/dt = a (bK – N) N. *Получим* 0,0002 × (1 × 200 – 100) × 100 = 0,0002 × 100 × 100 = 0,0002 × 10000 = 2 *миллиона человек. Таким образом, в первый год население мира вырастет на* 2 *миллиона и* *составит* 102 *миллиона человек. Но какой будет скорость роста мирового населения, когда его численность достигнет* 150 *миллионов человек? Используем ту же самую формулу и получим следующий результат:* 0,0002 × (1 × 200 – 150) × 150 = 0,0002 × 50 × 150 = 0,0002 × 7500 = 1,5 *миллиона человек за год.*

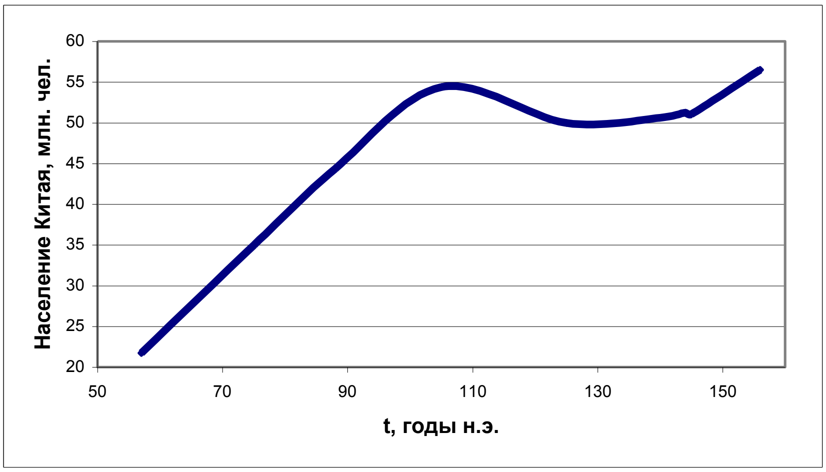
А каким будет годовой прирост населения, когда его численность составит 190 *миллионов?* 0,0002 × (1 × 200 – 190) × 190 = 0,0002 × 10 × 190 = 0,0002 × 1900 = 0,38 *млн., т.е.* 380 *тыс. человек в год. Как мы видим, при приближении населения к потолку, несущей способности Земли, темпы его роста все более и более замедляются и при* 199 *млн. составят уже* 0,0002 × (1 × 200 – 199) × 199 = 0,0002 × 1 × 199 = 0,0002 × 199 = 0,0398 *млн., т.е. только* 39800 *человек в год. В целом такая модель будет генерировать вполне определенную динамику, имеющую и свое собственное название, речь идет о логистической динамике (см. Диаграмму* 3.1*):*

***Диаграмма* 3.1.** *Динамика, генерируемая простой логистической моделью*



Отметим, что уже эта простая логистическая модель, описывает вполне реальный сценарий демографической динамики, неоднократно наблюдавшийся в истории отдельных регионов, когда рост населения происходил в условиях относительно стабильного уровня развития жизнеобеспечивающих технологий. Например, достаточно близка к подобной динамике демографическая динамика позднеханьского Китая (см. Диаграмму 3.2*):*

Диаграмма 3.2. *Демографическая динамика позднеханьского Китая (57 – 156 гг. н.э.*[6]*)*



Неплохо известны и конкретные механизмы, обуславливающие снижение темпов роста населения по мере его приближения к потолку несущей способности земли. Приближение к потолку несущей способности означало снижение производства продовольствия на душу населения. В результате ухудшалось качество питания, рос процент хронически недоедающих, заболеваемость, преступность и т.д. Все это влекло за собой увеличение смертности, которое не могло быть компенсировано увеличением рождаемости хотя бы потому, что в аграрных обществах рождаемость и так, как правило, находилась практически на уровне биологически возможного максимума (для соответствующих показателей средней продолжительности жизни). В результате разрыв между рождаемостью и смертностью начинал все больше и больше сокращаться, а, следовательно, темпы роста численности населения начинали все больше и больше стремиться к нулю (см., например: Нефедов 2003; Nefedov 2004).

В реальной истории наблюдались и случаи, когда численность населения того или иного региона начинала превышать потолок несущей способности земли (например, в результате деградации или засаливания почв). Первое уравнение макромодели дает вполне реалистическую предикцию того, что будет происходить в таких случаях. Действительно, при $bK < N$ *выражение* $(bK – N)$ *в формуле* (3.1) *примет отрицательное значение. Соответственно отрицательное значение примет и все выражение* $a\,(bK – N)\,N$, *а значит отрицательным станет и значение* dN/dt. *Т.е. население начнет сокращаться, пока его численность не придет в*

[6] Диаграмма подготовлена на основе данных переписей, приведенных (с некоторыми корректировками) в следующих публикациях: Bielenstein 1947: 126; 1986: 240–242; Durand 1960: 216; Loewe 1986c: 485; Чжао и Си 1988: 536 (подробнее об этом см. в следующей части *Законов истории* [Коротаев, Комарова, Халтурина 2007]).

соответствие с новым значением потолка несущей способности земли. Таким образом, формулой (3.1) *мы смоделировали основные мальтузианские допущения.*

*К счастью, несущая способность Земли не является константой. За свою историю человечество сделало огромное количество инноваций, повысивших потолок несущей способности Земли на несколько порядков. Это обстоятельство смоделировано нами при помощи второго уравнения. По сути дела оно моделирует допущения, известные в экономической антропологии как "босерупианские" (*Boserupian*) по имени выдающейся датской исследовательницы Э. Босеруп, в предельно четком виде сформулировавшей данные допущения в опубликованной в 1965 г. монографии* The Conditions for Agricultural Growth *(Boserup 1965).*[7] *Э. Босеруп рассматривала свой подход как антимальтузианский. Однако в дальнейшем было показано, что оба подхода вполне совместимы (см., например: Lee 1986; Wood 1998).*[8] *Каков смысл уравнения* dK/dt = cNK*? Речь здесь идет о том, что скорость роста жизнеобеспечивающих технологий (*dK/dt*) пропорциональна, с одной стороны, самому уровню их развития (*K*), а с другой стороны, численности населения (*N*, "Чем больше людей, тем больше изобретателей"). Это и есть, на наш взгляд, самый экономный способ математической записи "босерупианского" допущения.*

Как мы увидим ниже, записанные математически описанным выше образом данные два внешне противоречащие друг другу допущения, "мальтузианское" и "босерупианское" (действительно, одно из них вроде бы утверждает что-то типа "Больше народа – меньше кислорода", а другое скорее чего-то типа "Больше народа – больше кислорода"), неожиданно точно описывают динамику численности населения мира до 1962 г.

Компьютерная симуляция с использованием данной модели (с началом в 500 г. до н.э.)[9] дала следующие результаты (см. Диаграмму 3.3):

[7] Справедливости ради надо заметить, что за несколько лет до Э. Босеруп эти допущения были сформулированы и обоснованы классиком мировой экономической мысли С. Кузнецом (Kuznets 1960).

[8] Более того, Дж. В. Вуд (Wood 1998: 111) обращает внимание на следующее обстоятельство: "Собственно говоря, Мальтус без труда бы согласился с аргументацией Босеруп. На самом деле, он сам развил эту аргументацию в первом издании своего *Опыта о законе народонаселения* [1798]. Я подозреваю, что большинство современных читателей этого не замечают потому, что данная аргументация затерялась среди обширных теологических рассуждений в предпоследней главе, которые в наше время выглядят слишком старомодными – хотя во времена самого Мальтуса они должны были казаться откровенно еретическими; возможно, именно поэтому, будучи добропорядочным священником, Мальтус из последующих изданий книги эти рассуждения убрал".

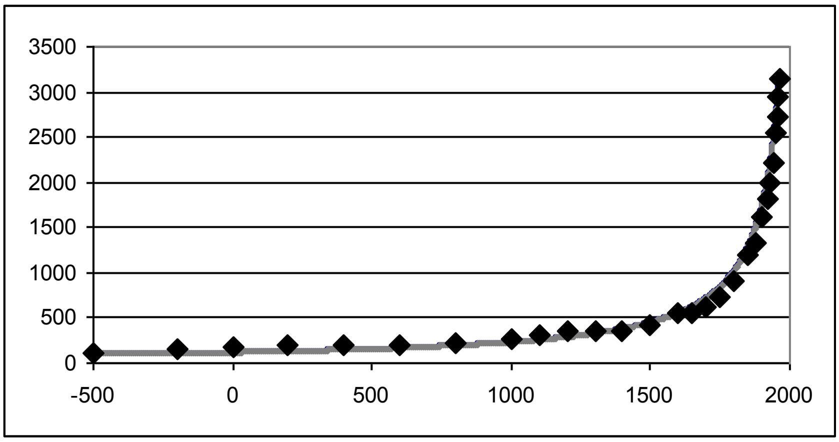
[9] Симуляция производилась годичными итерациями с использованием следующей системы разностных уравнений, выведенных из двух вышеописанных дифференциальных уравнений:

$K_{i+1} = K_i + cN_iK_i$

$N_{i+1} = N_i + a(bK_{i+1} - N_i)N_i$

Были выбраны следующие значения констант и начальных условий (в соответствии с имеющимися историческими оценками): N_0 = 0,01 десятков миллиардов (т.е. 100 миллионов в соответствии с оценками М. Кремера [Kremer 1993: 683]); a = 1,0; b = 1,0; K_0 = 0,01; c = 0,04093. Значение 1,0 было придано коэффициентам a и b для упрощения подсчетов; таким образом, в наших симуляциях с использованием первой макромодели K измерялось непосредственно как число людей, которых мир-система Земли может обеспечить сред-

Диаграмма 3.3. Динамика роста населения Земли (500 г. до н.э. – 1962 г. н.э.): наблюдаемые значения и значения, предсказанные моделью



ПРИМЕЧАНИЕ: сплошная серая линия была сгенерирована моделью; черные маркеры соответствуют оценкам численности населения мира по М. Кремеру (Kremer 1993)[10] для 500 г. до н.э. – 1950 г. н.э. и данным Бюро переписей США (US Bureau of the Census 2006) по населению мира для 1950–1962 гг.

Корреляция между предсказанными и наблюдаемыми значениями для данной симуляции имеет следующие характеристики: $R = 0{,}9983$; $R^2 = 0{,}9966$; $\alpha << 0{,}0001$.

Еще более высокая корреляция была получена при компьютерной симуляции с началом в 1650 г. (до 1962 г.)[11]: $R = 0{,}9989$; $R^2 = 0{,}9978$; $\alpha << 0{,}0001$. Симуляция с началом в 25000 г. до н.э. дала несколько более

ствами к существованию при данном уровне развития технологии (K), а население мира выходило на уровень несущей способности Земли практически сразу же после его обусловленного технологическим ростом повышения.

[10] Модель демонстрирует высокий уровень соответствия и с другими оценками динамики численности народонаселения мира (Thomlinson 1975; Durand 1977; McEvedy and Jones 1978: 342–351; Biraben 1980; Haub 1995: 5; UN Population Division 2006; World Bank 2006).

[11] Для данной симуляции были выбраны следующие значения констант и начальных условий (в соответствие с имеющимися историческими оценками): $N_0 = 0{,}0545$ десятков миллиардов (т.е. 545 миллионов); $a = 1{,}0$; $b = 1{,}0$; $K_0 = 0{,}0545$; $c = 0{,}05135$.

низкий (но все равно исключительно высокий) уровень корреляции[12]: R = 0,981; R^2 = 0,962; α << 0,0001.[13]

Отметим, что наряду с прочим данная модель объясняет, почему абсолютная скорость роста населения Земли до 1962 г. в тенденции была пропорциональная численности населения ($dN/dt = aN^2$), что было обнаружено еще С. П. Капицей (1992, 1996, 1999). Действительно, рост населения мира (N), например, с 10 до 100 миллионов человек подразумевает, что и уровень развития жизнеобеспечивающих технологий (K) вырос приблизительно в десять раз. С другой стороны, десятикратный рост численности населения означает и десятикратный рост числа потенциальных изобретателей, а значит, и десятикратное возрастание относительных темпов технологического роста. Таким образом, с ростом численности населения Мир-Системы в десять раз абсолютная скорость технологического роста вырастет в 10 × 10 = 100 раз (в соответствии с уравнением (3.2) макромодели). А так как N стремится к K (в соответствии с уравнением (3.1) макромодели), мы имеем все основания предполагать, что и абсолютная скорость роста населения мира (dN/dt) в таком случае в тенденции вырастет в 100 раз, то есть будет расти пропорционально квадрату численности населения.

[12] Компьютерная симуляция была начата в 24939 г. до н.э. и проведена с использованием вышеописанных разностных уравнений при помощи 269 вековых итераций с окончанием в 1962 г. н.э. Для данной симуляции были выбраны следующие значения констант и начальных условий: N_0 = 0,00334 миллиарда (т.е. 3,34 миллиона); a = 1,0; b = 1,0; K_0 = 0,00334; c = 2,13.

[13] От публикации результатов симуляций с началом в более ранние годы мы решили воздержаться, так как уровень расхождения экспертных оценок численности населения мира для этого времени начинает превышать критические пределы (в результате в пределах оценок всегда оказывается возможным найти стартовое значение параметра N, обеспечивающее исключительно высокий уровень корреляции с наблюдаемыми данными, что, на наш взгляд, делает на нынешнем уровне знаний симуляции с началом в доверхнепалеолитическую эпоху в высокой степени бессмысленными).